Taraqqiyot spektri
ILMIY JURNALI
Vol 2 № 11 2026

TO‘G‘RI STERJENNING BO‘YLAMA ERKIN TEBRANISHLARI: FIZIK MOHIYATI VA ASOSIY QONUNIYATLARI

Ramazonova Sunbula O'ktam qizi

Buxoro davlat pedagogika instituti 2-kurs magistranti Buxoro viloyati

G'ijduvon tumani 20-umumiy o‘rta ta'lim o‘qituvchisi

sunbularamazonova@6gmail.com

ANNOTATSIYA: Ushbu maqolada to‘g‘ri sterjenning bo‘ylama erkin tebranishlari fizik mohiyati va asosiy qonuniyatlari nazariy jihatdan tahlil qilinadi. Bir jinsli, ko‘ndalang kesim yuzasi o‘zgarmas sterjen uchun harakatning differensial tenglamasi keltirib chiqariladi. Elastik to‘lqinlarning tarqalish tezligi, xususiy chastotalar, tebranish modlari hamda chegaraviy shartlarning ta’siri o‘rganiladi. Nazariy hisoblash misoli orqali tebranish chastotasining sterjen uzunligi, elastiklik moduli va material zichligiga bog‘liqligi ko‘rsatiladi.

Kalit so‘zlar: to‘g‘ri sterjen, bo‘ylama tebranish, erkin tebranish, elastiklik moduli, zichlik, deformatsiya, kuchlanish, to‘lqin tenglamasi, xususiy chastota.

АННОТАЦИЯ: В статье теоретически анализируются физическая сущность и основные закономерности продольных свободных колебаний прямого стержня. Для однородного стержня с постоянной площадью поперечного сечения выводится дифференциальное уравнение движения. Рассматриваются скорость распространения упругих волн, собственные частоты, формы колебаний и влияние граничных условий. На примере теоретического расчёта показана зависимость частоты колебаний от длины стержня, модуля упругости и плотности материала.

Ключевые слова: прямой стержень, продольные колебания, свободные колебания, модуль упругости, плотность, деформация, напряжение, волновое уравнение, собственная частота.

ABSTRACT: This article provides a theoretical analysis of the physical nature and main principles of longitudinal free vibrations of a straight rod. The governing differential equation of motion is derived for a homogeneous rod with a constant cross-sectional area. The propagation speed of elastic waves, natural frequencies, vibration modes, and the influence of boundary conditions are examined. A theoretical calculation illustrates how the vibration frequency depends on the rod length, Young's modulus, and material density.

Keywords: straight rod, longitudinal vibration, free vibration, Young's modulus, density, strain, stress, wave equation, natural frequency.

1. KIRISH (INTRODUCTION)

Mexanik tebranishlar elastik jismlarning muvozanat holati atrofida vaqt davomida takrorlanuvchi harakati bo‘lib, mashinasozlik, qurilish mexanikasi, transport, energetika va materialshunoslikda muhim o‘rin tutadi. Sterjen, val, o‘q va quvur kabi konstruktiv elementlar cho‘zilish yoki siqilishga ishlaganda ularda bo‘ylama deformatsiyalar hamda dinamik jarayonlar yuzaga kelishi mumkin.

To‘g‘ri sterjenning bo‘ylama tebranishlari deb uning uzunlik o‘qi bo‘ylab material nuqtalarining muvozanat holatiga nisbatan siljishi bilan kechadigan tebranishlarga aytiladi. Bunda siljish yo‘nalishi sterjen o‘qiga parallel bo‘ladi. Materialning elastikligi deformatsiyaga qarshilik ko‘rsatib, tiklovchi kuch hosil qiladi, massa esa inertsiya tufayli harakatning davom etishiga sabab bo‘ladi.

Erkin tebranish tashqi davriy kuchning uzluksiz ta’sirisiz, boshlang‘ich siljish yoki boshlang‘ich tezlik berilgandan keyin yuzaga keladi. Ideal konservativ modelda tebranish kinetik va elastik potensial energiyaning o‘zaro almashinuvi hisobiga davom etadi. Real materiallarda ichki ishqalanish va muhit qarshiligi sababli amplituda vaqt o‘tishi bilan kamayishi mumkin.

Mavzuning dolzarbligi konstruksiyalarning dinamik xavfsizligini baholash, xususiy chastotalarni aniqlash va rezonans xavfini kamaytirish zarurati bilan belgilanadi. Tashqi davriy ta’sir chastotasi tizimning xususiy chastotasiga yaqinlashganda rezonans yuzaga kelishi va dinamik javob keskin ortishi mumkin.

Tadqiqotning maqsadi to‘g‘ri sterjenning bo‘ylama erkin tebranishlari fizik mohiyatini ochib berish, matematik modelini asoslash va asosiy fizik-matematik qonuniyatlarini tahlil qilishdan iborat. Ushbu maqsadga erishish uchun deformatsiya va kuchlanish bog‘lanishi, harakat tenglamasi, to‘lqin tezligi, xususiy chastotalar, tebranish modlari va chegaraviy shartlar ko‘rib chiqiladi.

2. TADQIQOT METODOLOGIYASI (METHODS)

2.1. Hisoblash modeli va qabul qilingan farazlar

Tadqiqot obyekti sifatida uzunligi L, ko‘ndalang kesim yuzasi A, Yung elastiklik moduli E va material zichligi ρ bo‘lgan to‘g‘ri sterjen qaraladi. Sterjen koordinatasi x uning uzunligi bo‘ylab, vaqt t bilan belgilanadi. u(x,t) funksiya esa x nuqtadagi bo‘ylama siljishni ifodalaydi.

Nazariy modelda material bir jinsli va izotrop, deformatsiyalar kichik, material chiziqli elastik deb qabul qilinadi. Ko‘ndalang kesim yuzasi sterjen uzunligi bo‘ylab o‘zgarmaydi. Harakat faqat sterjen o‘qi bo‘ylab sodir bo‘ladi. Dastlabki tenglamani chiqarishda ichki ishqalanish va tashqi qarshilik kuchlari e’tiborga olinmaydi.

2.2. Deformatsiya va kuchlanishning fizik bog‘lanishi

Sterjenning bo‘ylama nisbiy deformatsiyasi siljishning koordinata bo‘yicha hosilasi bilan aniqlanadi:

$$\varepsilon(x,t) = \partial u(x,t)/\partial x$$

Chiziqli elastiklik chegarasida normal kuchlanish Guk qonuniga bo‘ysunadi:

$$\sigma(x,t) = E\,\varepsilon(x,t) = E\,\partial u(x,t)/\partial x$$

Bu yerda ε — nisbiy bo‘ylama deformatsiya, σ — normal kuchlanish, E — Yung elastiklik moduli. Kesimdagi ichki bo‘ylama kuch N quyidagicha ifodalanadi:

$$N(x,t) = A\sigma(x,t) = EA\,\partial u(x,t)/\partial x$$

2.3. Bo‘ylama tebranish tenglamasini keltirib chiqarish

Sterjenning dx uzunlikdagi kichik elementini ajratamiz. Uning massasi dm = ρA dx ga teng. Elementning chap va o‘ng kesimlaridagi ichki kuchlar farqi Nyutonning ikkinchi qonuniga ko‘ra element massasining tezlanishiga teng:

$$\partial N/\partial x \cdot dx = \rho A\,dx \cdot \partial^2 u/\partial t^2$$

N = EA∂u/∂x ifodasini qo‘yib, umumiy bir o‘lchamli tenglamani olamiz:

$$\partial/\partial x\,(EA\,\partial u/\partial x) = \rho A\,\partial^2 u/\partial t^2$$

Bir jinsli sterjen uchun E va A doimiy bo‘lgani sababli tenglama soddalashadi:

$$EA\,\partial^2 u/\partial x^2 = \rho A\,\partial^2 u/\partial t^2$$

$$\partial^2 u/\partial t^2 = c^2\,\partial^2 u/\partial x^2, \quad c = \sqrt{(E/\rho)}$$

Hosil qilingan tenglama bir jinsli sterjenda bo‘ylama elastik to‘lqinlarning tarqalishini ifodalaydi. c kattalik sterjendagi bo‘ylama to‘lqinning nazariy tarqalish tezligidir. U elastiklik moduli ortganda oshadi, zichlik ortganda esa kamayadi.

2.4. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli

Tenglamaning yechimini u(x,t) = X(x)T(t) ko‘rinishida izlaymiz. Bu ifodani to‘lqin tenglamasiga qo‘yib, o‘zgaruvchilarni ajratamiz. Ajratish doimiysini $-k^2$ deb belgilash natijasida quyidagi tenglamalar hosil bo‘ladi:

$$X''(x) + k^2X(x) = 0$$

$$T''(t) + \omega^2T(t) = 0, \quad \omega = ck$$

Ularning umumiy yechimlari $X(x) = C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx)$ va $T(t) = D_1\cos(\omega t) + D_2\sin(\omega t)$ ko‘rinishida bo‘ladi. Demak, sterjenning tebranishi fazoviy shakl va vaqt bo‘yicha garmonik o‘zgarishning ko‘paytmasi sifatida ifodalanadi. Ruxsat etilgan k va ω qiymatlari chegaraviy shartlar orqali aniqlanadi.

2.5. Chegaraviy va boshlang‘ich shartlar

Chegaraviy shartlar sterjen uchlarining qanday mahkamlanganini yoki erkinligini ifodalaydi. Erkin uchda bo‘ylama ichki kuch nolga teng bo‘ladi, ya’ni N = 0 yoki $\partial u/\partial x = 0$. Mahkamlangan uchda esa siljish nol: u = 0. Masalan, ikkala uchi mahkamlangan sterjen uchun u(0,t) = 0 va u(L,t) = 0; ikkala uchi erkin sterjen uchun $\partial u/\partial x(0,t) = 0$ va $\partial u/\partial x(L,t) = 0$.

Boshlang‘ich shartlar sterjenning t = 0 paytdagi siljishi u(x,0) = f(x) va tezligi $\partial u/\partial t(x,0) = g(x)$ ni belgilaydi. Aynan boshlang‘ich holat qaysi tebranish modalarining qanday amplitudada qo‘zg‘alishini aniqlaydi.

3. NATIJALAR VA MUHOKAMA (RESULTS AND DISCUSSION)

3.1. Mahkamlangan-mahkamlangan sterjen

Ikkala uchi mahkamlangan sterjen uchun X(0) = 0 va X(L) = 0. Fazoviy yechimga birinchi shartni qo‘llash $C_1 = 0$ natijani beradi. Ikkinchi shartdan sin(kL) = 0, ya’ni $k_n = n\pi/L$ kelib chiqadi, bunda n = 1, 2, 3, ... Shuning uchun xususiy burchak chastotalar va chastotalar quyidagicha:

$$\omega_n = n\pi c/L$$

$$f_n = \omega_n/(2\pi) = nc/(2L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tebranish modalarining fazoviy shakli $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ bo‘ladi. Mahkamlangan uchlarda siljish doimo nol, ya’ni ular tugun nuqtalaridir.

3.2. Erkin-erkin sterjen

Ikkala uchi erkin sterjenda uchlardagi bo‘ylama kuch nol bo‘lishi kerak. Shuning uchun $X'(0) = 0$ va $X'(L) = 0$ shartlari qo‘yiladi. Bu shartlardan noldan farqli modalar uchun $k_n = n\pi/L$ hosil bo‘ladi. Demak, erkin-erkin sterjenning noldan farqli xususiy chastotalari ham $f_n = nc/(2L)$ formula bilan aniqlanadi, tebranish shakllari esa $X_n(x) = \cos(n\pi x/L)$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Bundan tashqari, erkin-erkin sterjenda $n = 0$ holat mavjud. Bu holat $\omega_0 = 0$ bo‘lgan qattiq jismning yaxlit ilgarilanma siljishiga mos keladi; unda sterjen deformatsiyalanmaydi. Shu sababli u tebranish chastotasi nol bo‘lgan rigid-body rejim sifatida qaraladi, elastik tebranish modasi emas.

Ideal bir jinsli sterjen uchun ikkala uchi erkin va ikkala uchi mahkamlangan holatlarda noldan farqli xususiy chastotalarning bir xil chiqishi fazoviy modalar shaklining turlicha ekanini inkor etmaydi. Bu xulosa aynan bir o‘lchamli, bir jinsli va kesimi o‘zgarmas sterjen modeli uchun o‘rinlidir.

3.3. Bir uchi mahkamlangan, ikkinchi uchi erkin sterjen

Sterjenning $x = 0$ uchi mahkamlangan, $x = L$ uchi erkin bo‘lsa, $X(0) = 0$ va $X'(L) = 0$ shartlari bajariladi. Fazoviy yechimdan $X(x) = C_2\sin(kx)$ kelib chiqadi. Erkin uchdagi shart $\cos(kL) = 0$ ni beradi. Shunday qilib:

$$k_nL = (2n - 1)\pi/2$$

$$f_n = (2n - 1)c/(4L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Bu natija chegaraviy shartlar xususiy chastotalarni qanday o‘zgartirishini yaqqol ko‘rsatadi. Bir uchi mahkamlangan va ikkinchi uchi erkin sterjenning asosiy chastotasi

ikkala uchi bir xil turdagi chegaraga ega bo‘lgan holatdagi asosiy chastotadan ikki marta kichik.

3.4. Tebranish modalarining fizik mazmuni

Tebranish modasi sterjenning muayyan xususiy chastotada qanday fazoviy shaklda harakatlanishini ifodalaydi. Birinchi moda asosiy yoki fundamental moda, undan keyingilari yuqori tartibli modalar deyiladi. Moda tartibi ortgan sari sterjen bo‘ylab tugun nuqtalari ko‘payadi. Tugun nuqtasida siljish nol bo‘ladi, qorin yoki antinod nuqtasida esa siljish amplitudasi lokal ravishda eng katta qiymatga yetadi.

Mahkamlangan-mahkamlangan sterjenda ikkala uch tugun hisoblanadi. Erkin-erkin sterjenda esa uchlarda bo‘ylama kuch nol bo‘ladi va siljish odatda ekstremal qiymatga ega bo‘lishi mumkin. Shu bois chegaraviy shartlarni to‘g‘ri tanlash tebranish shaklini fizik jihatdan to‘g‘ri talqin qilish uchun zarur.

3.5. Energiya saqlanish qonuni

Ideal, so‘nishsiz va tashqi kuchsiz sterjenning umumiy mexanik energiyasi kinetik hamda elastik potensial energiyalar yig‘indisidan iborat. Kinetik energiya:

$$K(t) = 1/2 \int_0^L \rho A \, (\partial u/\partial t)^2 \, dx$$

Elastik potensial energiya:

$$\Pi(t) = 1/2 \int_0^L EA \, (\partial u/\partial x)^2 \, dx$$

Ideal konservativ tizimda: $W(t) = K(t) + \Pi(t) = const$

Demak, tebranish davomida kinetik va potensial energiyalar o‘zaro almashinadi, ularning yig‘indisi esa saqlanadi. Real sterjenlarda ichki ishqalanish va materialning so‘nish xususiyatlari sababli mexanik energiyaning bir qismi issiqlikka aylanadi va tebranish amplitudasi kamayadi.

3.6. Xususiy chastotaga ta’sir qiluvchi omillar

Mahkamlangan-mahkamlangan yoki erkin-erkin ideal sterjenning birinchi noldan farqli xususiy chastotasi quyidagicha:

$$f_1 = 1/(2L)\ \sqrt{(E/\rho)}$$

Formula sterjen uzunligi ortishi bilan chastota kamayishini, elastiklik moduli ortishi bilan chastota oshishini, material zichligi ortishi bilan esa chastota kamayishini ko‘rsatadi. Bir jinsli, kesimi o‘zgarmas ideal sterjenda yuqori tartibli chastotalar asosiy chastotaning butun sonli karralariga teng: $f_n = nf_1$. Real konstruksiyalarda qo‘shimcha massalar, tayanchlarning elastikligi, kesimning o‘zgarishi, so‘nish va geometrik nomukammalliklar bu munosabatlardan chetlanishga olib kelishi mumkin.

3.7. Nazariy hisoblash namunasi

Po‘lat sterjen uchun quyidagi qiymatlar qabul qilinsin: uzunlik L = 1 m, Yung moduli $E = 200 \times 10^9$ Pa, zichlik $\rho = 7850$ kg/m³. Sterjen bir jinsli, kesimi o‘zgarmas va ikkala uchi ideal erkin deb qaraladi. Dastlab bo‘ylama to‘lqin tezligi hisoblanadi:

$$c = \sqrt{(E/\rho)} = \sqrt{(200 \times 10^9/7850)} \approx 5048\ \text{m/s}$$

Erkin-erkin sterjenning birinchi noldan farqli xususiy chastotasi:

$$f_1 = c/(2L) = 5048/(2 \times 1) \approx 2524\ \text{Hz}$$

Keyingi chastotalar ideal modelda $f_2 = 2f_1 \approx 5048$ Hz va $f_3 = 3f_1 \approx 7572$ Hz bo‘ladi. Hisoblash natijalari chastota materialning elastiklik va inertsiya xususiyatlari hamda sterjen uzunligiga bog‘liqligini tasdiqlaydi. Bu qiymatlar nazariy model natijasi bo‘lib, real sterjenda tayanchlar, so‘nish va boshqa omillar ta’sirida farq qilishi mumkin.

3.8. Muhandislik amaliyotidagi ahamiyati

Bo‘ylama tebranishlarni tahlil qilish mashina vallari, uzun quvurlar, metall sterjenlar, tortqi elementlar va boshqa konstruksiyalarning dinamik xususiyatlarini baholashda qo‘llanadi. Xususiy chastotalarni aniqlash tashqi davriy yuklamalar bilan rezonans yuzaga kelish ehtimolini baholashga yordam beradi. Zarur hollarda konstruksiya uzunligi,

materiali, kesimi yoki tayanch shartlarini o‘zgartirish orqali dinamik javobni maqbul darajaga keltirish mumkin.

4. XULOSA (CONCLUSION)

To‘g‘ri sterjenning bo‘ylama erkin tebranishlari elastik tiklovchi kuchlar va inertsiya ta’sirining o‘zaro bog‘lanishi natijasida yuzaga keladigan mexanik jarayondir. Bir jinsli, kesim yuzasi o‘zgarmas sterjen uchun harakat tenglamasi Nyutonning ikkinchi qonuni va Guk qonunidan kelib chiqarildi. Natijada bo‘ylama tebranishlarning to‘lqin tenglamasi $\partial^2u/\partial t^2 = (E/\rho)\partial^2u/\partial x^2$ ko‘rinishida olindi.

Bo‘ylama elastik to‘lqinning tarqalish tezligi $c = \sqrt{(E/\rho)}$ ekanligi aniqlandi. Xususiy chastotalar sterjenning uzunligi, elastiklik moduli, zichligi va chegaraviy shartlariga bog‘liq. Ideal bir jinsli sterjenda ikkala uchi mahkamlangan va ikkala uchi erkin holatlar uchun noldan farqli chastotalar bir xil formula bilan ifodalansa-da, tebranish modalarining fazoviy shakllari farq qiladi. Bir uchi mahkamlangan, ikkinchisi erkin holatda esa chastotalar yarim butun sonli spektr bo‘yicha joylashadi.

Energiya tahlili ideal konservativ tizimda kinetik va elastik potensial energiyalarning o‘zaro almashinishi hamda umumiy mexanik energiyaning saqlanishini ko‘rsatdi. Olingan nazariy natijalar sterjenli konstruksiyalarning dinamik xususiyatlarini hisoblash, xususiy chastotalarni baholash va rezonans xavfini kamaytirishda muhim ahamiyatga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Rao S. S. Mechanical Vibrations. 6th ed. Pearson, 2017.

2. Graff K. F. Wave Motion in Elastic Solids. Dover Publications, 1991.

3. Meirovitch L. Elements of Vibration Analysis. 2nd ed. McGraw-Hill, 1986.

4. Blevins R. D. Formulas for Dynamics, Acoustics and Vibration. Wiley, 2016.

5. Timoshenko S., Young D. H., Weaver W. Vibration Problems in Engineering. 5th ed. Wiley, 1990.