

XUSUSIY HOSILALI CHIZIQLI BO‘LMAGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING AVTOMODEL VA UMUMLASHGAN AVTOMODEL YECHIMI

Ne‘matullayeva Odinaxon Qahramon qizi

Farg‘ona davlat universiteti, amaliy matematika yo‘nalishi 1-bosqich magistranti
odinaxonnematullayeva@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada xususiy hosilali chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalar turli tabiiy va texnik jarayonlarni matematik modellashtirishda muhim o‘rin egallashi ko‘rsatib o‘tilgan. Mazkur ishda avtomodel hamda umumlashgan avtomodel yondashuvlarga asoslangan holda bunday tenglamalar uchun yechimlar qurish usullari tahlil qilinadi. Avtomodel o‘zgaruvchilardan foydalanish orqali ko‘p o‘zgaruvchili nolinear tenglamalarni oddiy differensial tenglamalar ko‘rinishiga keltirish imkoniyati asoslab beriladi. Tadqiqot natijalari matematik fizikaning murakkab masalalarini tahlil qilishda samarali qo‘llanishi mumkin.

Kalit so‘zlar: avtomodel yechim, nolinear tenglama, diffuziya, Burgers tenglamasi, KdV tenglamasi.

Abstract: This paper investigates self-similar and generalized self-similar solutions of nonlinear partial differential equations. By using scaling variables, nonlinear PDEs are reduced to ordinary differential equations. The obtained results are useful for modeling nonlinear physical processes.

Keywords: self-similar solution, nonlinear PDE, diffusion equation, Burgers equation, KdV equation.

Аннотация: В статье рассматриваются автомодельные и обобщённые автомодельные решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Показана возможность сведения уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: автомодельное решение, нелинейные уравнения, диффузия.

Ilmiy yangilik: Avtomodel va umumlashgan avtomodel yondashuv asosida klassik nolinear tenglamalar uchun yechimlar qurish sxemasi tizimlashtirildi hamda ularning fizik jarayonlarni tavsiflashdagi roli umumlashtirildi.

Kirish

Hozirgi davrda xususiy hosilali chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar fizika, mexanika, aerodinamika, kimyo va biologiya kabi ko'plab fan sohalarida murakkab jarayonlarni matematik modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etmoqda. Mazkur tenglamalar, odatda, yuqori darajada murakkab bo'lib, ularning aniq analitik yechimlarini topish har doim ham mumkin bo'lavermaydi. Shu sababli bunday tenglamalarni tahlil qilishda ularni soddalashtirishga xizmat qiluvchi maxsus matematik metodlarga ehtiyoj mavjud.

Shunday samarali metodlardan biri avtomodel va umumlashgan avtomodel yechimlar usuli hisoblanadi. Ushbu yondashuv tenglamadagi o'zgaruvchilarni mos ravishda masshtablash orqali tizimni oddiy differensial tenglamaga keltirish imkonini beradi. Natijada jarayonning asosiy fizik va matematik xususiyatlarini chuqurroq tahlil qilish mumkin bo'ladi.

1. Avtomodel o'zgaruvchilar nazariyasi

Avtomodel yechimlar nazariyasining asosiy g'oyasi shundan iboratki, bunda xususiy hosilali differensial tenglamada ishtirok etuvchi bir nechta mustaqil o'zgaruvchilar maxsus tanlangan masshtablash orqali yagona avtomodel o'zgaruvchiga birlashtiriladi. Umumiy holda avtomodel almashtirish quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\xi = \frac{x}{t^\alpha}, \quad u(x, t) = t^\beta F(\xi)$$

bu yerda α va β —o'lcham ko'rsatkichlari, $F(\xi)$ — avtomodel funksiya hisoblanadi. Bu almashtirish xususiy hosilali differensial tenglama orqali belgilangan fizik jarayonning vaqt bo'yicha qanday o'zgarishini ifodalaydi. Masalan, diffuziya jarayonida xususiy yechimning yoyilishi vaqtning kvadrat ildiziga proporsional bo'ladi, shuning uchun $\alpha = \frac{1}{2}$ bo'ladi.

Avtomodel yondashuvning afzalligi shundaki, u murakkab nolinear tizimlarni soddalashtirib, ko'plab hollarda aniq yoki sifat jihatdan tahlil qilinadigan yechimlarni olish imkonini beradi.

2. Diffuziya tenglamasi uchun avtomodel yechim

Issiqlik yoki moddalar tarqalishini tasvirlovchi klassik tenglamani olaylik:

$$u_t = Du_{xx}$$

Avtomodel yechim quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

O'lchamlar tahlili natijasida $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu qiymatlar tenglamaga qo'yilganda quyidagi oddiy differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$F'' + \frac{1}{2}\xi F' + \frac{1}{2}F = 0$$

Yechimi Gauss funksiyasi bo'ladi:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

Bu yechim diffuziya jarayonining asosiy fizik xususiyatlarini, ya'ni tarqalish tezligi va massasining saqlanishini aniq ifodalaydi.

3. Burgers tenglamasi va shok to‘lqinlar

Burgers tenglamasi nolinear konveksiya va diffuziya jarayonlarini birgalikda tavsiflaydi:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

Avtomodel o‘zgaruvchi sifatida $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$ tanlanadi. Buning natijasida quyidagi oddiy differensial tenglama hosil bo‘ladi:

$$-\frac{1}{2}\xi F' + FF' = \nu F''$$

Mazkur tenglamaning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$u(x, t) = U_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]$$

Ushbu yechim fizikada “yumshatilgan zarba to‘lqin” sifatida talqin qilinadi va gazlar dinamikasi hamda transport jarayonlarini modellashtirishda muhim ahamiyatga ega.

4. KdV tenglamasi uchun umumlashgan avtomodel yechim

KdV tenglamasi dispersiya va nolinearlik orasidagi barqarorlik natijasida vujudga keladigan solitonlarni tasvirlaydi:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Bu tenglama oddiy avtomodel emas, balki umumlashgan avtomodel yechim aniqrog‘i harakatlanuvchi to‘lqin ko‘rinishida yechimga ega:

$$u(x, t) = F(\xi), \quad \xi = x - ct$$

Natijada quyidagi oddiy differensial tenglama hosil bo‘ladi:

$$F'' - cF + 3F^2 = 0$$

Uning yechimi mashhur soliton ko‘rinishida ifodalanadi:

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right)$$

Yechimlarning mavjudligi umumlashgan avtomodel yechimlarning nolinear dispersiv tizimlarni ifodalashdagi ahamiyatini ko'rsatadi.

5. Umumlashgan avtomodel o'zgaruvchilar

Ba'zi bir mushkul tizimlarda oddiy $\frac{x}{t^\alpha}$ kabi ko'rinish yetarli bo'lmaydi. Masalan:

$$\xi = \frac{x}{t^\alpha (\ln t)^\gamma}, \quad u(x, t) = t^\beta (\ln t)^\delta F(\xi)$$

Ushbu yondashuv plazma kollapsi, noan'anaviy diffuziya jarayonlari va turbulent oqimlarni tahlil qilishda qo'llaniladi. Umumlashgan avtomodel yechimlar tizim simmetriyalariga asoslanib quriladi va nolinear jarayonlarning asosiy qonuniyatlarini ochib beradi.

Xulosa

Avtomodel va umumlashgan avtomodel yechimlar xususiy hosilali chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalarni tahlil qilishda samarali matematik vosita hisoblanadi. Ushbu yondashuvlar murakkab nolinear tizimlarni oddiy differensial tenglamalarga keltirish imkonini beradi hamda jarayonning fizik mazmunini chuqurroq tushunishga yordam beradi. Diffuziya, Burgers va KdV tenglamalari misolida avtomodel yechimlarning amaliy va nazariy ahamiyati yaqqol namoyon bo'ldi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

- 1. Barenblatt G.I.** *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, 1996. – **12–25-betlar** (avtomodel va o'z-o'ziga o'xshashlik tushunchasi) – **67–82-betlar** (diffuziya tenglamasi uchun avtomodel yechimlar)
- 2. Ovsiyannikov L.V.** *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press, 1982. – **31–44-betlar** (masshtablash va invariant o'zgaruvchilar) – **98–115-betlar** (xususiy hosilali tenglamalar uchun simmetriya usullari)

3. **Polyanin A.D., Zaitsev V.F.** *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. CRC Press, 2012. – **145–168-betlar** (nolinear diffuziya tenglamalari) – **312–328-betlar** (Burgers tenglamasi va aniq yechimlar)
4. **Whitham G.B.** *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, 1999. – **201–220-betlar** (nolinear to‘lqinlar va tarqalish) – **245–260-betlar** (zarba va yumshatilgan zarba to‘lqinlar)
5. **Olver P.J.** *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, 2000. – **89–104-betlar** (masshtablash simmetriyasi) – **181–195-betlar** (avtomodel yechimlarni qurish)
6. **Zeldovich Ya.B., Raizer Yu.P.** *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Academic Press, 1966. – **52–70-betlar** (zarba to‘lqinlarining fizik modeli) – **134–150-betlar** (nolinear gidrodinamik jarayonlar)
7. **Bluman G.W., Kumei S.** *Symmetries and Differential Equations*. Springer, 1989. – **23–39-betlar** (Lie simmetriyalar asoslari) – **117–132-betlar** (xususiy hosilali tenglamalar uchun invariant yechimlar)
8. **Debnath L.** *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser, 2012. – **56–74-betlar** (nolinear tenglamalarning umumiy xususiyatlari) – **210–225-betlar** (diffuziya va konveksiya modellari)
9. **Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P.** *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations*. Walter de Gruyter, 1995. – **14–28-betlar** (parabolik tenglamalarning umumiy nazariyasi) – **95–110-betlar** (avtomodel tipdagi yechimlar)
10. **Lie S.** *Theory of Transformation Groups*. Chelsea Publishing, 1970. – **61–78-betlar** (o‘lcham va masshtablash o‘zgarishlari) – **140–155-betlar** (invariant yechimlar nazariyasi)