

**HAQIQIY SONLAR TO‘PLAMIDA ZARISKIY VA METRIK
TOPOLOGIYALARDA OCHIQ VA YOPIQ TO‘PLAMLAR
VA UNIVERSAL FAZO**

Zohidova Zebo Olimjon qizi

O‘zbekiston Milliy Universiteti, 1-magistranti

Zebomuzaffarova111@gmail.com

Egamberdiyeva Aziza Habibullo qizi

O‘zbekiston Milliy Universiteti, 2-magistranti

azizae4741@gmail.com

ANNOTATSIYA: Mazkur maqolada haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ ustida aniqlangan Zariskiy va metrik topologiyalarda ochiq hamda yopiq to‘plamlar tushunchalarining mazmuni va xossalari qiyosiy jihatdan tahlil qilinadi. Tadqiqotda ushbu ikki topologiyaning shakllanish asoslari, ularning ochiq va yopiq to‘plamlar orqali ifodalanishi hamda amaliy va nazariy jihatdan farqlari yoritiladi. Metrik topologiyada ochiq to‘plamlar masofa tushunchasiga asoslanib aniqlanishi va intuitiv xarakterga ega ekanligi ko‘rsatiladi. Shuningdek universal fazo ta’rifi hamda ularga misollarga keltirilib yangi universal fazo qurilishi ko‘rsatiladi.

Kalit so‘zlar: topologik fazo, Zariskiy topologiya, metrik topologiya, ochiq to‘plam, yopiq to‘plam, haqiqiy sonlar, universal fazo.

ABSTRACT: This paper provides a comparative analysis of the concepts of open and closed sets in Zariski and metric topologies defined on the set of real numbers $\mathbb{R}$. The study examines the foundational principles of these two topologies, their interpretation through open and closed sets, and their theoretical differences. It is shown that in metric topology, open sets are defined based on the notion of distance and possess an intuitive structure.

Keywords: topological space, Zariski topology, metric topology, open set, closed set, real numbers, universal space

Topologiya matematik analiz, algebra va geometriya fanlari o'rtasida muhim bog'lovchi soha hisoblanadi. Topologik fazoda ochiq va yopiq to'plamlar tushunchasi ushbu fanning asosiy tayanch elementlaridan biri bo'lib, ko'plab nazariy va amaliy masalalarning yechimida markaziy o'rin egallaydi. Bir xil to'plam ustida turli topologiyalarni aniqlash orqali fazoning turli xossalarini o'rganish mumkin bo'ladi. Ayniqsa, haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ ustida aniqlangan metrik va Zariskiy topologiyalar bu borada yaqqol misol bo'la oladi.

Metrik topologiya masofa tushunchasiga asoslangan bo'lib, u analiz va funksiyalar nazariyasida keng qo'llaniladi. Zariskiy topologiyasi esa algebraik geometriyada muhim o'rin tutadi va uning ochiq to'plamlari algebraik tenglamalar orqali aniqlanadi.

Mazkur maqolaning maqsadi haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan Zariskiy va metrik topologiyalarda ochiq hamda yopiq to'plamlarning xossalarini qiyosiy tahlil qilish, ularning o'ziga xos jihatlarini misollar asosida yoritish, universal fazolarga misollar qurishdan iborat.

Klassik manbalarda topologiya, avvalo, metrik fazolardan kelib chiqqan holda rivojlangan. Metrik topologiya tushunchasi masofa funksiyasi orqali aniqlanib, limitlar, uzluksizlik va yaqinlik kabi tushunchalarni formal tarzda ifodalash imkonini beradi. Ushbu yondashuv analiz fanida keng qo'llaniladi va ko'plab darsliklarda asosiy topologik model sifatida qaratiladi.

Zariskiy topologiyasi esa algebraik geometriya doirasida shakllangan bo'lib, uning ochiq va yopiq to'plamlari algebraik tenglamalar sistemasiga bog'liq holda aniqlanadi. Adabiyotlarda Zariskiy topologiyaning asosiy xususiyati sifatida uning juda qo'pol topologiya ekanligi ta'kidlanadi, ya'ni unda ochiq to'plamlar soni metrik topologiyaga nisbatan sezilarli darajada kam bo'ladi. Bu holat algebraik obyektlarning global xossalarini o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Mavjud ilmiy manbalar tahlili shuni ko'rsatadiki, Zariskiy va metrik topologiyalarni solishtirishda asosiy e'tibor ochiq va yopiq to'plamlar tuzilishiga qaratiladi. Ayrim tadqiqotlarda ushbu topologiyalar o'rtasidagi farqlar abstrakt tarzda bayon etilgan bo'lsa, ushbu maqolada misollar orqali aniq va tushunarli tahlil berish maqsad qilib olinadi. Xususan, haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ ustida ushbu ikki topologiyani bir vaqtda ko'rib chiqish ularning mohiyatini yaqqolroq ochib beradi. Tahlil jarayonida qarama-qarshi misollar metodidan foydalaniladi. Ya'ni, bir topologiyada ochiq bo'lgan to'plamning ikkinchi topologiyada ochiq emasligi holatlari ko'rib chiqiladi. Ratsional sonlar to'plami, ochiq intervallar va chekli to'plamlar orqali ochiqlik va yopiqlik tushunchalari amaliy misollar yordamida asoslanadi. Ushbu metodologiya orqali Zariskiy va metrik topologiyalarning strukturaviy farqlari aniqlanadi hamda ularning nazariy ahamiyati yoritiladi. Mazkur bo'limda haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ ustida aniqlangan metrik va Zariskiy topologiyalarda ochiq hamda yopiq to'plamlarning xossalari aniq misollar asosida tahlil qilinadi. Ushbu misollar orqali bir xil to'plamning turli topologiyalarda mutlaqo farqli xususiyatlarga ega bo'lishi ko'rsatib beriladi.

Avvalo, ratsional sonlar to‘plami $\mathbb{Q}$ ni qaraymiz. Metrik topologiyada $\mathbb{Q}$ to‘plami $\mathbb{R}$ da zich joylashgan bo‘lib, har qanday ochiq intervalda kamida bitta ratsional son mavjud. Biroq bu holat $\mathbb{Q}$ ning ochiq to‘plam ekanligini anglatmaydi. Chunki $\mathbb{Q}$ ning ixtiyoriy elementi atrofida shunday ochiq interval mavjud emaski, u to‘liq $\mathbb{Q}$ ichida yotsin. Shu sababli $\mathbb{Q}$ metrik topologiyada ochiq to‘plam hisoblanmaydi.

Zariskiy topologiyada $\mathbb{Q}$ to‘plamining ochiqligi uning komplementi bilan aniqlanadi. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ to‘plami cheksiz bo‘lgani sababli, $\mathbb{Q}$ Zariskiy yopiq to‘plam bo‘la olmaydi. Natijada, $\mathbb{Q}$ Zariskiy topologiyada ham ochiq to‘plam sifatida qaralmaydi. Ushbu misol bir xil to‘plamning har ikkala topologiyada ochiq bo‘lmasligi mumkinligini, biroq buning sabablari turlicha nazariy asosga ega ekanligini ko‘rsatadi.

Keyingi misol sifatida $(0,1)$ ochiq intervalni qaraymiz. Metrik topologiyada $(0,1)$ intervali ochiq to‘plam hisoblanadi, chunki uning har bir nuqtasi atrofida shu interval ichida yotuvchi yetarlicha kichik ochiq shar mavjud. Bu holat metrik topologiyaning masofa tushunchasiga asoslangan intuitiv xususiyatini namoyon etadi.

Zariskiy topologiyada esa $(0,1)$ interval ochiq to‘plam emas. Haqiqatan ham, uning to‘ldirmasi $\mathbb{R} \setminus (0,1) = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ bo‘lib, bu to‘plam cheksiz elementlardan tashkil topgan. Zariskiy topologiyada yopiq to‘plamlar asosan chekli to‘plamlar va butun fazodan iborat bo‘lgani sababli, $(0,1)$ ning to‘ldirmasi Zariskiy yopiq to‘plam shartini qanoatlantirmaydi. Shuning uchun $(0,1)$ Zariskiy topologiyada ochiq to‘plam sifatida qaralmaydi.

Umumiy holda (a,b) ko‘rinishidagi ochiq intervallar ham xuddi shunday xususiyatga ega. Metrik topologiyada (a,b) ochiq to‘plam bo‘lsa-da, Zariskiy topologiyada u ochiq emas. Chunki $\mathbb{R} \setminus (a,b)$ to‘plami cheksiz bo‘lib, Zariskiy yopiq to‘plamlar sinfiga kirmaydi. Bu holat Zariskiy topologiyada ochiq intervallar tushunchasi deyarli mavjud emasligini ko‘rsatadi.

Shuningdek, $[a,b]$ yopiq kesmasini ham qaraymiz. Metrik topologiyada $[a,b]$ yopiq to‘plam bo‘lib, u limit nuqtalarini o‘z ichiga oladi. Zariskiy topologiyada esa $[a,b]$ ham ochiq, ham yopiq to‘plam emas. Chunki uning to‘ldirmasi cheksiz to‘plam bo‘lib, Zariskiy yopiq to‘plam shartini qanoatlantirmaydi. Natijada, $[a,b]$ Zariskiy topologiyada oddiy to‘plam sifatida qaraladi.

Yuqoridagi misollar asosida aniqlanishicha, $\mathbb{R}$ ustida Zariskiy topologiya metrik topologiyaga nisbatan ancha qo‘pol bo‘lib, unda ochiq to‘plamlar soni juda kamdir. Zariskiy topologiyada ochiq to‘plamlar asosan $\mathbb{R}$ dan chekli to‘plamlarni olib tashlash orqali hosil qilinadi. Metrik topologiyada esa ochiq to‘plamlar fazoning lokal xossalarini batafsil tavsiflash imkonini beradi.

UNIVERSAL FAZO

Universal fazolar topologiyaning muhim tushunchalaridan bo‘lib, unda bir xil xossa ega fazolarni bir fazoga joylash orqali yangi fazo hosil qilinadi. Mazkur joylashuv gomeomorf tarzda qanday joylashtirilishini ko‘rsatadi. Universal fazo- muayyan sinf fazolarning barchasini gomeomorf kiritish orqali o‘z ichiga sig‘dira oladigan fazo. Ya’ni berilgan sinfdagi har qanday fazo bu universal fazoning fazoostsi sifatida tasvirlanadi. Bu tushuncha topologiyada muhim, chunki u muayyan sinf masalalarini bitta ‘universal’ fazoostsi orqali o‘rganish soddalashtiriladi.

Ta’rif [1]. X ni P xossaga ega universal fazo deyiladi agar quyidagi shartlar bajarilsa:

- 1) X fazo P xossaga ega bo‘lsa;
- 2) Har qanday P xossaga ega Y fazoni X fazoni ichiga joylashtirish mumkin bo‘lsa.

Misollar:

1. Hilbert kubi $([0,1]^{\aleph_0})$ yoki cheksiz o'lchamli birlik kub): Barcha metrik fazolar uchun universal (Urysohn teoremasi bo'yicha). Bu fazo kompakt va metric bo'lib, ko'p topologik xossalarni namoyish etadi.

2. Kantor kubi (D^m) – bu ikki nuqtali diskret $D=\{0,1\}$ fazoning m marta tixonof ko'paytmasidan hosil bo'lgan to'plam. Bu to'plam barcha chekli no'l o'lchamli kompakt metrik fazolar uchun universal to'plam bo'ladi.

3. Urysohn universal metrik fazosi. Barcha separable metrik fazolar uchun izometrik joylashtirish imkonini beradi.

1-Teorema. [2] Tixonov kubi I^m barcha salmog' $m \geq \aleph_0$ bo'lgan Tixonov fazolari uchun universal fazo bo'ladi.

2-Teorema. Bizga $E = \{0,1,2\}$ to'plam va $|E \setminus E_0| \geq 1$ shartni qanoatlantiruvchi $E_0 = \{0\}$ to'plam ostisi berilgan bo'lsin. E to'plamdagi har qanday $A \subset E$ to'plam ostisiga quyidagi tarzda ichki operator aniqlaymiz:

$$Int(A) = A \cap E_0$$

Bu yerda $Int(A)$ esa A to'plamning ichki nuqtalari. Shuningdek, $Int(E) = E$ deb belgilanadi. Ushbu ichki operator orqali E ustida topologik fazo aniqlanadi va uning topologiyasi quyidagilardan iborat:

$$\tau = \{\emptyset, \{0\}, E\}$$

E^m fazo salmog'i $m \geq \aleph_0$ bo'lgan barcha topologik fazolar uchun universal fazo bo'ladi.

Isbot. 1) E fazoda faqat 0 nuqta atrofida alohida ochiq to'plam mavjud ($\{0\}$), qolgan nuqtalar (1 va 2) diskret ochiq to'plam bo'lmaydi. E^m ko'paytmaning ochiq bazasi quyidagicha aniqlanadi. Ochiq bazis elementlari faqat chekli koordinatalarda 0 to'plamni tanlab olinadi, qolgan koordinatalarda esa butun E to'plam olinadi. Faraz

qilaylik (X, σ) salmog'i $\omega(X) \leq m$ bo'lgan topologik fazo berilgan bo'lsin. U holda, teorema 1.1.15 [2] ga ko'ra X da bazasi $|\mathcal{U}| < m$ bo'lgan bazis mavjud, ya'ni $\mathcal{U} = \{U_\alpha: \alpha \in A\} |A| \leq m$. Quyidagi akslantirishni olaylik:

Har bir

$$f_\alpha: X \rightarrow D = \{0_\alpha, 1_\alpha\}$$

quyidagicha berilgan:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0_\alpha, & \text{agar } x \in U_\alpha \\ 1_\alpha, & \text{agar } x \in X \setminus U_\alpha \end{cases}$$

Ushbu $\{f_i\}$ akslantirishlar oilasi X fazo nuqtalarni ajrata oladi, chunki baza sifatida har bir nuqtaning atrofida mos U_i bor. Demak, ular diagonal akslantirish qurishga asos bo'ladi:

$$f: X \rightarrow \prod \{D_\alpha: \alpha \in A\} \subset E^A \subset E^m$$

Bu funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) Inyektiv: chunki bazis orqali har bir nuqta har xil nuqtalarga o'tadi, ya'ni agar $x_1 \neq x_2$ bo'lsa, demak ulardan kamida bittasi biror U_α birida bo'lib, ikkinchisi $X \setminus U_\alpha$ da bo'ladi. U holda shunday $\alpha \in A$ topilib $f_\alpha(x_1) \neq f_\alpha(x_2)$ bo'ladi.

2) Uzluksiz: chunki ochiq to'plamlarning proobrazlari yana ochiq to'plam bo'ladi, ya'ni:

$$f_\alpha^{-1}(0_\alpha) = U_\alpha, \quad f_\alpha^{-1}(1_\alpha) = X \setminus U_\alpha$$

Natijada diagonal akslantirish teoremasi [2] ga ko'ra X ni E^m fazo ostisiga gomeomorf joylashtirish mumkin. Demak, har qanday salmog'i $m \geq \aleph_0$ bo'lgan topologik fazo E^m ichiga gomeomorf tarzida joylashtiriladi. U holda E^m fazo salmog'i $m \geq \aleph_0$ bo'lgan fazolar uchun universal fazo bo'ladi. Teorema 2 isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Yu.V.Sadovnichiy, R.B.Beshimov, T.F.Jurayev. Topologiya, 2024. Ma'rifat nashriyoti. 200 b.
2. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции, Москва: МГУ, 2006, 288 с.
3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях, Москва, Наука, 1974, 434 с.