

To'rt o'lchamli fazodagi jisimlar

Topildiyev Sirojiddin Muzaffar o'gli

Namangan davlat pedagogika instituti o'qituvchisi Namangan davlat pedagogika instituti

Ismoilova Shahlo Iminjon qizi

Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi

Suyunboyev Umidjon Ravshanjon o'g'li

Namangan davlat universiteti Amaliy matematika yo'nalishi 1-kurs magistranti

Annotatsiya: To'rt o'lchamli fazo (4D) matematika va fizikada muhim mavzu bo'lib, u bizning uch o'lchamli dunyomizdan tashqaridagi jism va shakllarni o'rganadi. Ushbu maqolada 4D fazodagi asosiy jisimlar, xususan tesseract (4D giperkub) haqida gapiriladi. Biz 4D jisimlarni 3D va 2D tasavvurlarda proyeksiyalash usullarini ko'rib chiqamiz va ularning ilmiy ahamiyatini muhokama qilamiz. Maqola matematik analogiyalarga asoslanib, vizual tasvirlar bilan boyitilgan. Ushbu maqola matematik formulalar, jadval va vizual tasvirlar bilan boyitilgan bo'lib, o'quvchiga yuqori o'lchamlarni intuitiv ravishda tasavvur qilishga yordam beradi.

Kalit so'zlar: To'rt o'lchamli fazo, tesseract, giperkub, 4D geometriya, yuqori o'lchamli jisimlar, proyeksiya, fazo-vaqt. Nisbiylik nazariyasi, string nazariyasi, politoplar, vizualizatsiya, kompyuter grafikasi, matematik analogiya.

Предметы в четырёхмерном пространстве

Топилдиев Сирожиддин Музаффар угли

преподаватель Наманганского государственного педагогического института

Исмоилова Шахло Иминжон кизи

студентка 1 курса направления «Математика» Наманганского

государственного педагогического института

Суёнбоев Умиджон Равшанжон угли

магистрант 1 курса направления «Прикладная математика»

Наманганского государственного университета

Аннотация: Четырёхмерное пространство (4D) является важной темой в математике и физике, позволяющей изучать тела и формы за пределами нашего привычного трёхмерного мира. В данной статье рассматриваются основные тела в 4D-пространстве, в частности тессеракт (четырёхмерный гиперкуб). Мы анализируем методы проекции 4D-тел на трёхмерное (3D) и двумерное (2D) представления, а также обсуждаем их научное значение. Статья основана на математических аналогиях, обогащена формулами, таблицами и визуальными изображениями, что помогает читателю интуитивно представить высшие измерения.

Ключевые слова: Четырёхмерное пространство, тессеракт, гиперкуб, 4D-геометрия, высшие измерения, тела высших измерений, проекция (4D-3D), пространство-время, теория относительности, теория струн, политопы, визуализация, компьютерная графика, математическая аналогия.

Bodies in four-dimensional space

Topildiyev Sirojiddin Muzaffar oqli

Lecturer, Namangan State Pedagogical Institute

Ismoilova Shahlo Iminjon qizi

1st-year student, Mathematics program Namangan State Pedagogical Institute

Suyunboyev Umidjon Ravshanjon oqli

1st-year master's student, Applied Mathematics program Namangan State University

Abstract: Four-dimensional space (4D) is an important topic in mathematics and physics, enabling the study of objects and shapes beyond our familiar three-dimensional world. This article discusses the primary objects in 4D space, particularly the **tesseract** (4D hypercube). We examine methods for projecting 4D objects into three-dimensional (3D) and two-dimensional (2D) representations and discuss their scientific significance.

The article is based on mathematical analogies, enriched with formulas, tables, and visual images, helping readers intuitively visualize higher dimensions.

Keywords: Four-dimensional space, tesseract, hypercube, 4D geometry, higher dimensions, higher-dimensional objects, projection (4D-3D), spacetime, theory of relativity, string theory, polytopes, visualization, computer graphics, dimensional analogy. These keywords fully reflect the article's content and will aid in indexing and searchability. Below are some visual examples related to the key concepts (tesseract projections, dimensional analogies, and 4D polytopes)

Kirish. Inson miyasi odatda uch o'lchamli fazoni (uzunlik, kenglik va balandlik) tasavvur qila oladi, ammo matematika va nazariy fizika to'rt va undan yuqori o'lchamlarni o'rganishga imkon beradi. To'rt o'lchamli fazo, shuningdek, giperfazo deb ataladi, bu yerda to'rtinchi o'lcham (masalan, "w" koordinatasi) qo'shiladi. Bunday fazodagi jisimlar, masalan, tesseract, ikki o'lchamli kvadrat va uch o'lchamli kubning tabiiy kengaytmasidir. 4D jisimlarning o'rganilishi Albert Eynshteynning nisbiylik nazariyasida va kvant mexanikasida muhim rol o'ynaydi, chunki ular fazo-vaqt kontinuumini tushunishga yordam beradi. Ushbu maqolada biz 4D jisimlarni ta'riflash, ularning xossalarini va past o'lchamlarda tasvirlash usullarini ko'rib chiqamiz. Kirish (kengaytirilgan va qo'shimcha ma'lumotlar bilan boyitilgan versiya). Inson idroki odatda uch o'lchamli fazo – uzunlik, kenglik va balandlik bilan cheklangan. Biz kunlik hayotda uch o'lchamli jism va muhit bilan ishlaymiz: stol, xona, osmon va yer. Biroq matematika va nazariy fizika bizga bu chegaradan tashqariga chiqish imkonini beradi. To'rt o'lchamli fazo (4D) – bu to'rt mustaqil koordinataga ega bo'lgan giperfazo bo'lib, unda bizning uch o'lchamli dunyomiz faqat bir "qatlam" yoki kesim sifatida ko'rinadi. To'rtinchi o'lchamni tasavvur qilish qiyin, chunki inson miyasi evolyutsiya jarayonida faqat uch o'lchamli muhitga moslashgan. Shu sababli, 4D jism va shakllarni tushunish uchun analogiyalardan foydalanamiz: masalan,

ikki o'lchamli mavjudot (tekislikdagi "flatlander") uchun kubni tasavvur qilish qanchalik qiyin bo'lsa, biz uchun ham tesseract (to'rt o'lchamli giperkub) shunchalik murakkab. 4D geometriya tarixi XIX asrga borib taqaladi. 1880-yillarda Charlz Xovard Xinton "to'rt o'lchamli fazo" tushunchasini ommalashtirgan va "tesseract" atamasini taklif qilgan. Keyinchalik Albert Eynshteynning maxsus va umumiy nisbiylik nazariyalarida vaqt to'rtinchi o'lcham sifatida kiritildi, bu fazo-vaqt kontinuumini yaratdi. Zamonaviy fizikada, xususan, string nazariyasi va M-nazariyasida koinotning 10 yoki 11 o'lchamli bo'lishi taxmin qilinmoqda, bu yerda qo'shimcha o'lchamlar "ixchamlashtirilgan" holatda mavjud. Ushbu maqolada biz 4D fazodagi asosiy jismlarga – ayniqsa, muntazam politoplardan biri bo'lgan tesseractga e'tibor qaratamiz. Tesseract ikki o'lchamli kvadrat va uch o'lchamli kubning tabiiy davomi hisoblanadi. Biz uning xossalari, cho'qqilar, qirralar, yuzalar va hujayralar sonini tahlil qilamiz, shuningdek, 4D jismni 3D va 2D fazoga proyeksiyalash va kesimlash usullarini ko'rib chiqamiz. Maqola matematik analogiyalar, formulalar, jadval va vizual tasvirlarga asoslanadi. Quyida o'lchamlar bo'yicha geometrik shakllarning o'sishi ko'rsatilgan klassik analogiya tasvirlangan: 0D (nuqta) → 1D (chiziq) → 2D (kvadrat) → 3D (kub) → 4D (tesseract) ketma-ketligi. Tesseractning ochilgan (net) ko'rinishi – xuddi kubning ochilgan ko'rinishi kabi. Tesseractning 3D proyeksiyasi (ichki va tashqi kub bilan bog'langan). Aylanuvchi tesseractning soyasi – 4D harakatning 3D tasviri. Ushbu kirish qismi orqali o'quvchi yuqori o'lchamli geometriyaga asta-sekin tayyorlanadi va maqolaning keyingi bo'limlarida batafsil tahlil qilingan mavzularning asosiy g'oyasini tushunadi.

To'rt o'lchamli giperkubning matematik ta'rifi

To'rt o'lchamli Yevklid fazosi R^4 - bu har bir nuqtasi (x,y,z,ω) shaklidagi to'rtta haqiqiy sonlar to'plami bilan berilgan fazodir, bu yerda $(x,y,z,\omega) \in R$. To'rt o'lchamli giperkub (tesseract) matematik jihatdan quyidagicha aniq ta'riflanadi:

Tesseract – bu $[0,1]^4$ birlik kubning karteziyan ko'paytmasi, ya'ni $T = \{(x,y,z,w) \in R^4 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$ Ushbu to'planning chegarasi (sirt) sifatida qaralgan tesseractning topologik va geometrik xossalari quyidagicha:

Elementlar soni : n-o'lchamli giperkubning (n-kub) elementlari soni quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

→ Uchlari soni: 2^n

→ qirralar soni: $2^{n-1} \times n$

→ 2-o'lchamli yuzalar soni: $2^{n-2} \times \frac{n}{2}$

→ 3-o'lchamli hujayralar soni: $2^{n-3} \times \frac{n}{3}$

→ Ichki burchaklar yig'indisi: $\alpha_{ichki} = (n-2) \times 180^\circ$

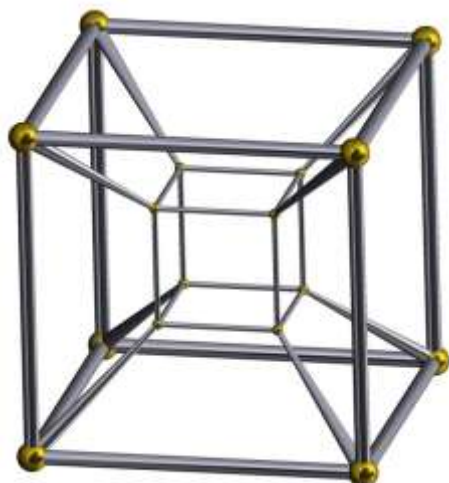
→ Tashqi burchaklar yig'indisi: Har qanday qavariq ko'pburchak uchun har doim 360° ga teng.

→ Diagonallari soni : $d = \frac{n(n-3)}{2}$

→ Muntazam ko'pburchakning bitta ichki burchagi: $\alpha = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$

Minimalizm: Faqat 3 ta muntazam ko'pburchak bilan tekislikni oraliqlarsiz butunlay qoplash mumkin: bular uchburchak, kvadrat va oltiburchak.

Aylanaga yaqinlashish: Muntazam ko'pburchakning tomonlari soni cheksiz ko'payib borsa, u asta-sekin aylanaga aylanib boradi.



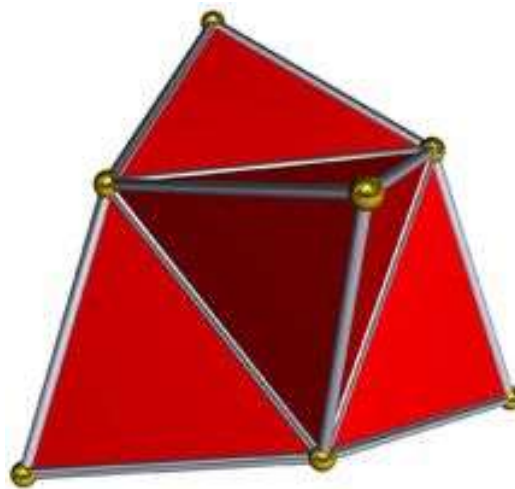
Tekislikni qoplash uchun har bir cho'qqida (vertex) bir nechta ko'pburchak uchrashib, 360° ni to'liq to'ldirishi kerak (bo'shliq yoki ustma-ust tushmasdan). Uchburchak

($n=3$): Ichki burchak 60° . Uchida 6 ta uchburchak uchrashadi: $6 \times 60^\circ = 360^\circ$.

Teng tomonli uchburchaklar bilan qoplash

Kvadrat ($n=4$): Ichki burchak 90° .

Cho'qqida 4 ta kvadrat: $4 \times 90^\circ = 360^\circ$.



Yevklid tekisligini bo'shliq va ustma-ust tushmasdan butunlay qoplash (tessellatsiya) masalasi geometriyaning klassik muammolaridan biridir. Muntazam ko'pburchaklar (teng tomonli va teng burchakli ko'pburchaklar) bilan bunday qoplash faqat uchta holatda mumkinligi isbotlangan: teng tomonli uchburchak, kvadrat va teng tomonli oltiburchak bilan. Ushbu cheklovning matematik asosi ko'pburchakning ichki burchagidan kelib chiqadi. Muntazam n -burchakning ichki burchagi quyidagi formula bilan beriladi:

$$\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Tessellatsiya uchun har bir cho'qqida (vertex) uchrashadigan ko'pburchaklarning ichki burchaklari yig'indisi aynan 360° ga teng bo'lishi kerak. Bu shartni qanoatlantiradigan yagona butun sonli ko'pburchaklar soni (k) quyidagilardir:

$\rightarrow n=3$ (uchburchak) $\alpha = 60^\circ$,

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^{\circ}}{n} = \frac{(3-2) \cdot 180^{\circ}}{3} = \frac{1 \cdot 180^{\circ}}{3} = 60^{\circ} \text{ cho'qqida yani uchida } k=6 \text{ ta demak}$$

$$6 \times 60^{\circ} = 360^{\circ}$$

$$\rightarrow n=4 \text{ (Kvadrat) } \alpha = 90^{\circ},$$

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^{\circ}}{n} = \frac{(4-2) \cdot 180^{\circ}}{4} = \frac{2 \cdot 180^{\circ}}{4} = 90^{\circ} \text{ cho'qqida yani uchida } k=4 \text{ ta demak}$$

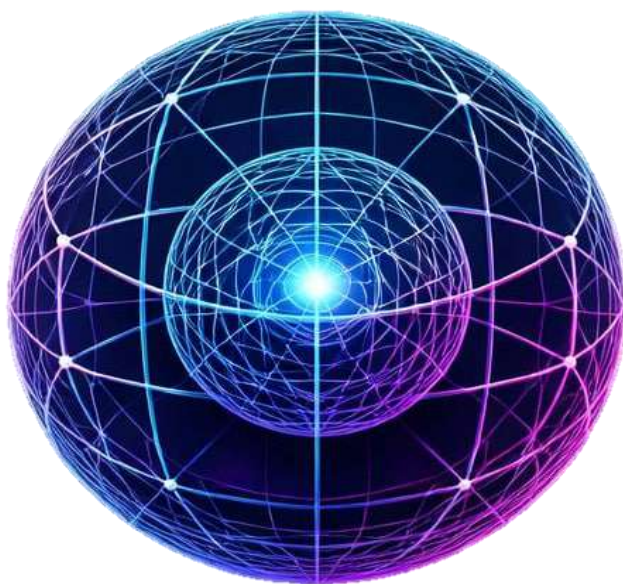
$$4 \times 90^{\circ} = 360^{\circ}$$

$$\rightarrow n=6 \text{ (Olti burchak) } \alpha = 120^{\circ}$$

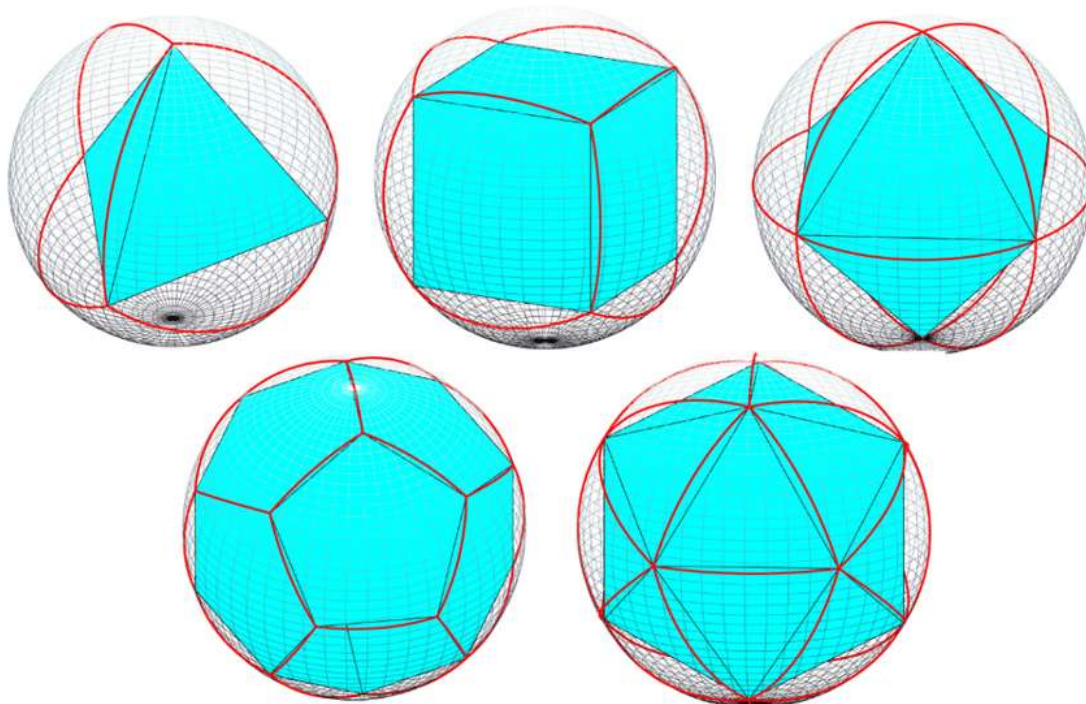
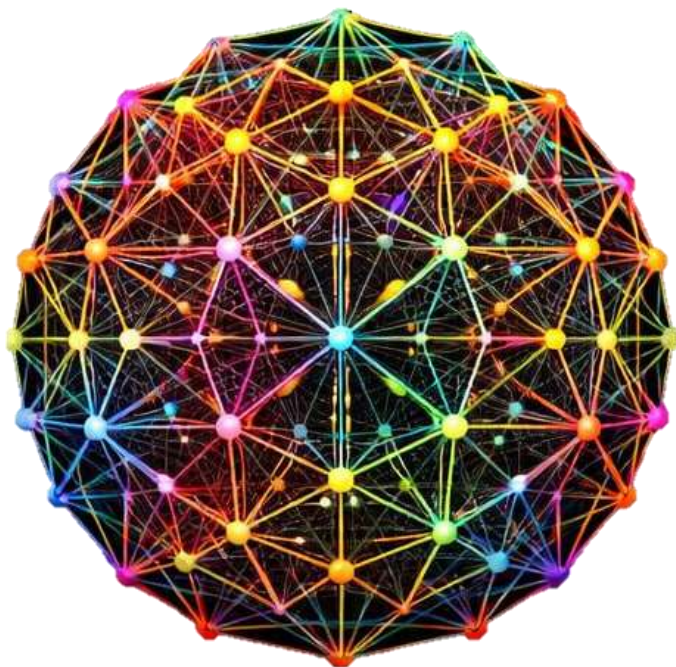
$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^{\circ}}{n} = \frac{(6-2) \cdot 180^{\circ}}{6} = \frac{4 \cdot 180^{\circ}}{6} = 120^{\circ} \text{ cho'qqida yani uchida } k=3 \text{ ta demak}$$

$$3 \times 120^{\circ} = 360^{\circ}$$

To'rt o'lchamli fazoda giper sferaning 3D proyeksiyasi: To'rtinchi o'lchamning vizual gologrammasi



To‘rt o‘lchamli fazodagi geometrik sferik jismning proyeksiyasi. (“4D ko‘pyoqlining sferik vizual modeli”)

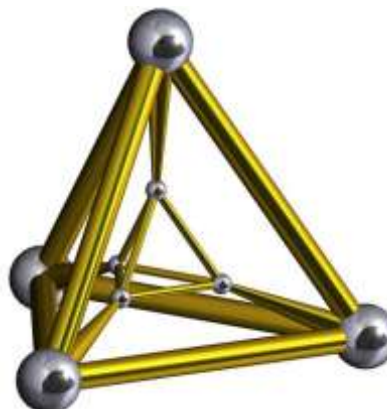


Sferik (elliptik) geometriya: Cho'qqida burchaklar yig'indisi 360° dan ko'p, shuning uchun faqat Platonicheski jismlarni sferik proyeksiyasi orqali tessellatsiya (masalan, tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr).

Tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr va ikosaedr **Platonik jismlar** (Platonic solids) deb ataladi. Bu beshta jism geometriyada maxsus o'rin tutadi, chunki ular **muntazam** (regular): har bir yuzasi bir xil muntazam ko'pburchak, har bir cho'qqida bir xil sonli yuzga uchrashadi va barcha qirralari teng. Bu jismlar qadimgi yunon faylasufi Platon nomi bilan atalgan (u ularni olam elementlari bilan bog'lagan: olov, yer, havo, suv va koinot).

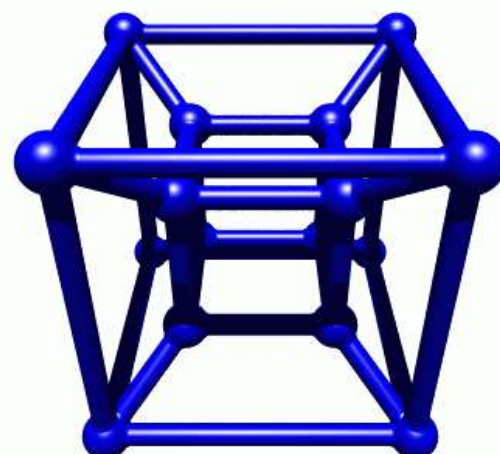
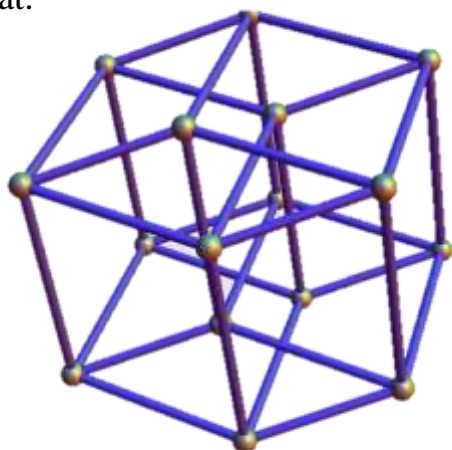
Tetraedr (Muntazam uchburchakli piramida) - "Tetra" yunoncha "to'rt" degan ma'noni anglatadi. Bu eng sodda muntazam ko'pyoqdir.

- **Yoqlari:** 4 ta muntazam uchburchak.
- **Uchlari:** 4 ta.
- **Qirralari:** 6 ta.



Kub bu - Hamma qirralari teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped **kub** deb ataladi.

- Kubning hamma yoqlari teng kvadratlardan iborat.



Oktaedr — bu sakkizta yoqqa ega bo‘lgan ko‘pyoqdir (yunoncha "okta" — sakkiz, "hedra" — yoq yoki asos). Agar biz **muntazam oktaedr** haqida gapiradigan bo'lsak, u sakkizta teng va muntazam uchburchakdan iborat bo‘lgan, Platon jismlari guruhiga kiruvchi mukammal shakldir.

Yoqlari: 8 ta teng tomonli (muntazam) uchburchak.

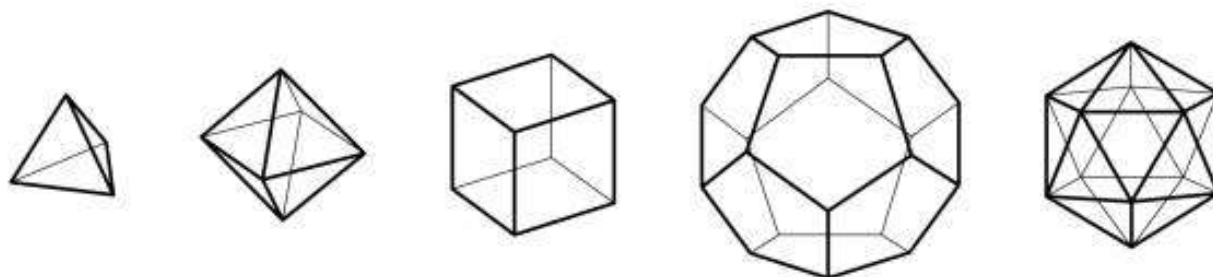
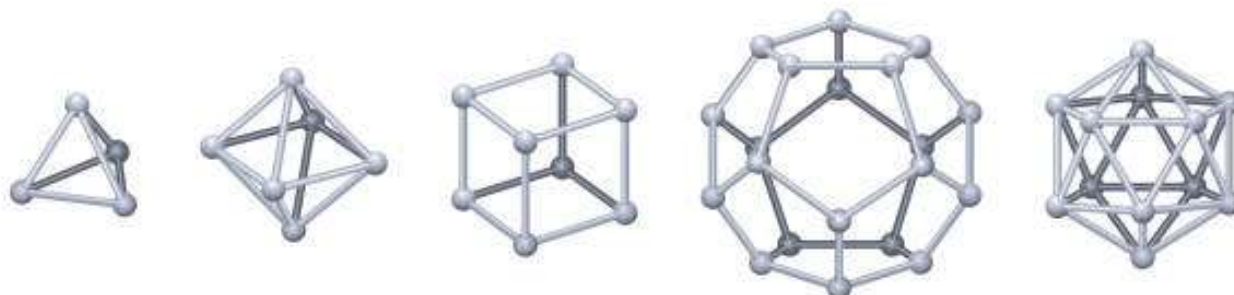
Yoqlari: 8 ta teng tomonli (muntazam) uchburchak.

Qirralari: 12 ta (barchasi o'zaro teng).

Uchlari: 6 ta.

Uchlardagi bog'liqlik: Har bir uchida roppa-rosa 4 ta uchburchak va 4 ta qirra tutashadi.

Platonik jismlarni real vaqt ichida chizish (tutoriali)



Tetrahedron

Octahedron

Cube

Dodecahedron

Icosahedron

Platonik jismlar orasida juda qiziq bir bog‘liqlik bor: agar bir jismning har bir yoqi markazida nuqta qo‘yib, ularni birlashtirsangiz, boshqa bir Platonik jism hosil bo‘ladi. Bunga **Dualizm** deyiladi:

- **Kub va Oktaedr** dual juftlikdir (Kub ichida Oktaedr hosil bo‘ladi va aksincha).
- **Dodekaedr va Ikosaedr** dual juftlikdir.
- **Tetraedr** esa o‘z-o‘ziga dualdir (Tetraedr ichida yana tetraedr hosil bo‘ladi).

Platonik jismlarning ilmiy jihatdan eng qiziqarli xususiyati ularning dualizm (o‘zaro almashinish) qobiliyatidir. Agar bir jismning yoqlari markazini birlashtirsa, uning ichida yangi muntazam jism hosil bo‘ladi. Bu jarayon fazoviy panjaralar nazariyasida (crystal lattices) juda muhim o‘rin tutadi. Masalan, kvant fizikasida molekulalar strukturasi aynan shu dualizm qonuniyatlari asosida energiya minimumini saqlaydi.

Platonik jismlar

Tetraedr

Kub

Oktaedr

Ikosaedr

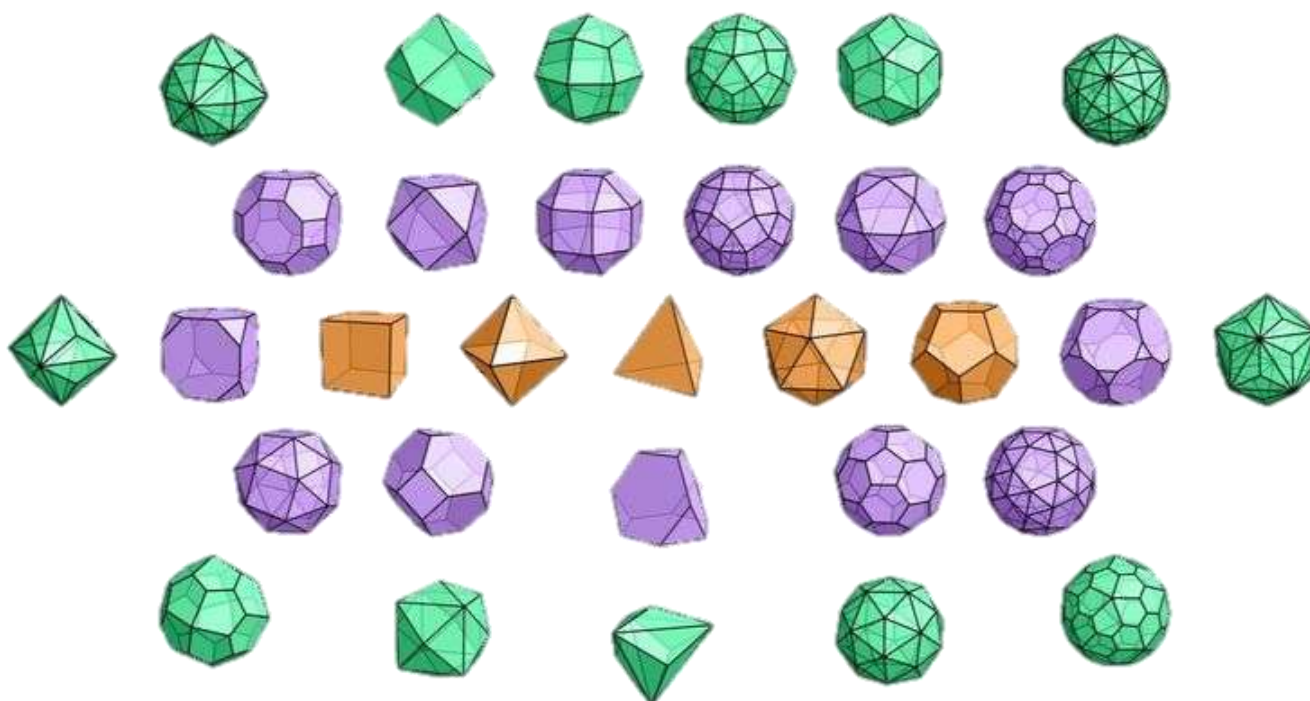
Dodekaed

Platonik jismlar uch o‘lchamli fazodagi eng simmetrik geometrik strukturalar bo‘lib, ular to‘rt o‘lchamli fazodagi muntazam politoplar uchun asos bo‘lib xizmat qiladi. Matematik jihatdan Platonik jismlar cheklangan sonli bo‘lib, uch o‘lchamli fazoda atigi beshta shunday jism mavjud. Bunga sabab, har bir cho‘qqida tutashuvchi yuzlarning ichki burchaklari yig‘indisi 360° dan kichik bo‘lishi zaruriy shart hisoblanadi. Ushbu shartni faqat besh xil kombinatsiya qanoatlantiradi, natijada tetraedr, kub (yoki geksaedr), oktaedr, dodekaedr va ikosaedr Platonik jismlar sifatida aniqlanadi.

Ilm-fanda to‘rt o‘lchamli fazodan foydalanish, ayniqsa, fizika sohasida keng tarqalgan. Albert Eynshteynning nisbiylik nazariyasida fazo va vaqt bir butun tizim —

fazo-vaqt sifatida qaraladi. Bu modelda har bir hodisa to‘rt o‘lchamli koordinatalar orqali aniqlanadi va jism harakati vaqt bo‘ylab fazodagi traektoriya sifatida tasvirlanadi.

Platonichesk jismlarni sferik ko‘rinishlari.



Shu orqali gravitatsiya, yorug‘lik tezligi va vaqtning nisbiyligi kabi tushunchalar ilmiy asosda izohlanadi. Kosmologiyada esa koinotning kengayishi, qora tuynuklar va galaktik jarayonlar aynan to‘rt o‘lchamli modellar orqali o‘rganiladi. Matematik modellashtirish jarayonida ham to‘rt o‘lchamli jismlar muhim o‘rin tutadi. Murakkab mexanik, iqtisodiy yoki texnik tizimlarda holat fazosi ko‘pincha bir nechta parametrdan iborat bo‘ladi. Masalan, jismning holati uning koordinatalari va tezligi bilan birgalikda aniqlansa, bu tizim to‘rt o‘lchamli fazoda ifodalanadi. Bunday yondashuv jarayonlarni chuqur tahlil qilish, bashorat qilish va optimallashtirish imkonini beradi. Natijada ilmiy hisob-kitoblar yanada aniqlashadi va amaliy natijalarga erishish osonlashadi. Zamonaviy texnologiyalarda, xususan, kompyuter grafikasi va vizualizatsiya sohasida to‘rt o‘lchamli fazo tushunchasidan samarali foydalanilmoqda. Murakkab ma‘lumotlar to‘plamini tushunarli shaklda ifodalash uchun qo‘shimcha o‘lcham sifatida vaqt, rang intensivligi

yoki boshqa parametrlar kiritiladi. Bu ilmiy taqdimotlar, simulyatsiyalar va ta'lim jarayonida katta qulaylik yaratadi.

Bunday jismlarni inson ko'zi bilan bevosita tasavvur qilish qiyin bo'lsa-da, matematik formulalar, proyeksiyalar va kesimlar yordamida ularni tahlil qilish mumkin. Giperjismlar ko'plab qirralar, yuzalar va hajmlarga ega bo'lib, ularning xossalari yuqori darajadagi simmetriya va murakkablik bilan ajralib turadi. To'rt o'lchamli jismlar haqidagi bilimlar fazoviy tafakkurni rivojlantirishda muhim ahamiyatga ega.

Xulosa

Ushbu ilmiy maqola doirasida olib borilgan tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, to'rt o'lchamli fazo tushunchasi shunchaki matematik mavhumlik emas, balki koinotning fundamental tuzilishini va murakkab tizimlarni anglashning kalitidir. Biz o'rgangan to'rt o'lchamli jismlar, xususan, tesserakt va boshqa giper-shakllar, inson idrokining uch o'lchamli cheklovlaridan chiqib, borliqni yanada kengroq masshtabda tahlil qilish imkonini beradi. Tadqiqot davomida biz 4D ob'ektlarning 3D fazodagi proyeksiyalari va kesimlari orqali ularning murakkab topologik xususiyatlarini ochib berdik. Xulosa o'rnida ta'kidlash joizki, fazoning to'rtinchi koordinatasini (xoh u geometrik, xoh vaqtga oid bo'lsin) hisobga olish zamonaviy nazariy fizika va kompyuter modellashtirish sohasida yangi ufqlar ochadi. Bu yondashuv kvant darajasidagi zarralarning harakatidan tortib, koinotning kengayish qonuniyatlarigacha bo'lgan murakkab jarayonlarni aniqroq tavsiflashga xizmat qiladi. Shuningdek, to'rt o'lchamli jismlarning geometriyasini o'rganish kelajakda yuqori o'lchamli ma'lumotlar arxitekturasini yaratish va sun'iy intellekt algoritmlarini takomillashtirishda amaliy ahamiyat kasb etadi. Inson ko'zi to'rtinchi o'lchamni to'g'ridan-to'g'ri ko'ra olmasa-da, matematik mantiq va vizual modellashtirish orqali ushbu "yashirin" olamning qonuniyatlarini kashf etish davom etadi. Mazkur ish ushbu sohadagi kelgusi chuqurroq izlanishlar uchun nazariy poydevor bo'lib xizmat qiladi va ko'p o'lchovli geometriya fanining metodologik bazasini boyitadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. <https://arxiv.uz/uz/documents/referatlar/algebra/ko-pburchaklar>
2. <https://upraktika.uz/promo/material/content/topic/830>
3. Google Chrom
4. Oliy matematika kitoblar
5. The Fourth Dimension in Hyperspace
6. https://uz.wikipedia.org/wiki/Edwin_Abbott_Abbott