

Matematik analizda integral hisob va uning geometrik tatbiqlari

Choriyeva Sanam Tojiyevna

Termiz davlat universiteti Algebra va geometriya kafedrasida dotsenti

Jumanazarova Gulmira Bahrom qizi

Termiz davlat universiteti matematika 1-kurs talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada aniq integral tushunchasi va uning yuzalarni hamda hajmlarni hisoblashdagi amaliy ahamiyati tadqiq etiladi. Maqolada egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash algoritmlari, aylanish jismlarining hajmini aniqlashda integralning o'rnini tahlil qilingan. Shuningdek, murakkab geometrik shakllarning parametrlarini aniqlashda integral hisobning qulayliklari misollar orqali ko'rsatib berilgan.

Kalit so'zlar: Aniq integral, egri chiziqli trapetsiya, aylanish jismi, yuza, hajm, integrallash chegarasi, matematik model, Nyuton-Leybnits formulasi.

Abstract: This article examines the concept of the definite integral and its practical importance in calculating surfaces and volumes. The article analyzes algorithms for calculating the surface area of a curved trapezoid, the role of the integral in determining the volume of solids of revolution. Also, the convenience of integral calculation in determining the parameters of complex geometric shapes is shown through examples.

Keywords: Definite integral, curved trapezoid, basic body, surface, volume, limit of integration, mathematical model, Newton-Leibniz formula.

Аннотация: В данной статье исследуется понятие определенного интеграла и его практическое значение при вычислении поверхностей и объемов. Анализируются алгоритмы вычисления площади поверхности криволинейной трапеции, роль

интеграла в определении объема тел вращения. Также на примерах показана удобство вычисления интеграла при определении параметров сложных геометрических фигур.

Ключевые слова: Определенный интеграл, криволинейная трапеция, тело вращения, поверхность, объем, предел интегрирования, математическая модель, формула Ньютона-Лейбница

Integral hisobi matematik analizning eng muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, u differensial hisobga teskari jarayon sifatida vujudga kelgan. Arximed davridan boshlab shakllangan ”yuzani hisoblash“ g‘oyasi XVII asrda Nyuton va Leybnits tomonidan yagona tizimga keltirildi. Bugungi kunda integral tushunchasi fizika, iqtisodiyot va geometriyada murakkab shakllarning xususiyatlarini aniqlashda keng qo‘llaniladi. Matematik analiz fanida integral tushunchasi ikki xil yondashuvda o‘rganiladi: aniqmas va aniq integrallar. Agar aniqmas integral funksiyani tiklash jarayoni (differensiallashga teskari amal) bo‘lsa, aniq integral muayyan sohadagi yig‘indini (limitni) ifodalaydi. Integral hisobi antik davrlarda ”kvadratura“ masalalaridan boshlangan bo‘lsa, bugungi kunda u muhandislik va kosmik tadqiqotlarning ajralmas qismidir.

Aniq integralning amaliy tatbiqlari ko‘plab sohalarda qo‘llaniladi. Geometrik shakllarning yuzasini hisoblash orqali grafik asosidagi tahlilga erishiladi. Matematik analiz kursida integral tushunchasi ikki xil yondashuvda o‘rganiladi: aniqmas va aniq integrallar. Agar aniqmas integral funksiyani tiklash jarayoni (differensiallashga teskari amal) bo‘lsa, aniq integral muayyan sohadagi yig‘indini (limitni) ifodalaydi. Integral hisobi antik davrlarda ”kvadratura“ masalalaridan boshlangan bo‘lsa, bugungi kunda u muhandislik va kosmik tadqiqotlarning ajralmas qismidir.

Integral hisobi matematik analizning eng muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, u differensial hisobga teskari jarayon sifatida vujudga kelgan. Arximed davridan boshlab shakllangan ”yuzani hisoblash“ g‘oyasi XVII asrda Nyuton va Leybnits tomonidan yagona tizimga keltirildi. Bugungi kunda integral tushunchasi fizika, iqtisodiyot va geometriyada murakkab shakllarning xususiyatlarini aniqlashda keng qo‘llaniladi.

Aniq integralning ta'rif (Riman integrali). Aniq integral g'oyasi segmentni bo'laklarga bo'lish va yig'indilarni hisoblashga asoslanadi. Agar $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsa, bu kesmani n ta bo'lakka bo'lib, integral yig'indini quyidagicha yozish mumkin:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Limit holatida $n \rightarrow \infty$ bo'lganda, bu yig'indi aniq integralga aylanadi:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

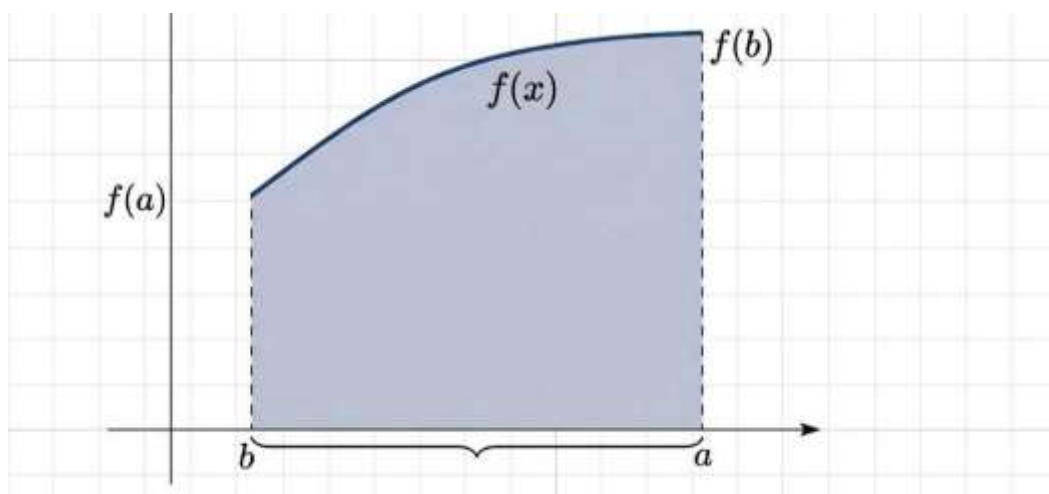
Aniq integralning geometriyaga tatbiqlari.

Aniq integral yordamida bir qator geometrik kattaliklarni aniq hisoblash mumkin:

A) Yuzani hisoblash.

Agar $f(x) \geq 0$ bo'lsa, $\int_a^b f(x) dx$ integrali yuqoridan $y = f(x)$ funksiya grafigi, yon

tomonlardan $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlari bilan chegaralangan **egri chizikli trapetsiyaning yuzasini** ifodalaydi.



1-rasm

Bu yerda $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralovchi chiziq bo‘lib xizmat qiladi. Agar yuza ikki funksiya $f(x)$ va $g(x)$ orasida bo‘lsa, formula quyidagicha o‘zgaradi:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Misol: $y = \frac{1}{1+2^x}$ funksiya grafigi, Ox o‘qi hamda $x = -2$ va $x = 2$ chiziqlari bilan chegaralangan yuzani topish.

Yechish. Yuzalarni hisoblash formulasiga ko‘ra:

$$S = \int_{-2}^2 \frac{1}{1+2^x} dx$$

ni hosil qilamiz. Ushbu integralni hisoblaymiz. Integralning chegarasi simmetrik bo‘lgani uchun uni nol nuqtada ikkiga ajratamiz:

$$S = \int_{-2}^0 \frac{1}{1+2^x} dx + \int_0^2 \frac{1}{1+2^x} dx. \quad (1)$$

Birinchi qo‘shiluvchida integral o‘zgaruvchisini almashtiramiz: $x = -t$ almashtirishini bajaramiz. Bunda:

Agar $x = -2$ bo‘lsa, $t = 2$ bo‘ladi.

Agar $x = 0$ bo‘lsa, $t = 0$ bo‘ladi.

$dx = -dt$ bo‘ladi.

Endi birinchi integralni yangi o‘zgaruvchi orqali va integral xossasidan foydalanib quyidagicha yozamiz:

$$\int_2^0 \frac{1}{1+2^{-t}} (-dt) = \int_0^2 \frac{1}{1+2^{-t}} dt.$$

Bu yerda integral osti ifodada shakl almashtiramiz:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2^t}} = \frac{1}{\frac{2^t + 1}{2^t}} = \frac{2^t}{2^t + 1}.$$

Demak, integral: $\int_0^2 \frac{2^t}{2^t + 1} dt$ ko‘rinishiga keldi. t o‘zgaruvchini yana x ga

o‘zgartiramiz: $\int_0^2 \frac{2^x}{1 + 2^x} dx.$

Olingan natijani (1) ga qo‘yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$S = \int_0^2 \frac{2^x}{1 + 2^x} dx + \int_0^2 \frac{1}{1 + 2^x} dx.$$

Endi umumiy yuzani hisoblaymiz.

$$S = \int_0^2 \frac{2^x + 1}{1 + 2^x} dx.$$

Bundan

$$S = \int_0^2 1 dx = [x]_0^2 = 2.$$

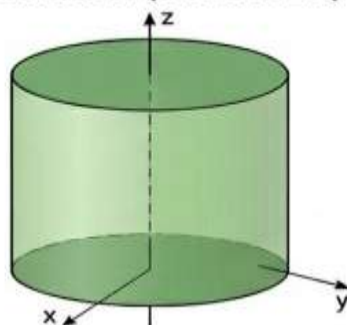
Bu kabi misollar maktab matematika darsliklarida kam uchraydi. Chunki, darsliklarda odatda har bir qismni alohida hisoblash talab qilinadi. Bu misolda esa har bir qismni alohida hisoblash uchun murakkab logarifm qatnashgan funksiyalar chiqadi, lekin ularni qo‘shganda barcha murakkabliklar qisqarib ketadi. Bu matematik ”go‘zallik“ deb ataladi.

Aylanish jismi — bu biror tekis shaklni (masalan, to‘g‘ri chiziq, egri chiziq yoki ko‘pburchakni) o‘zgarmas bir to‘g‘ri chiziq (aylanish o‘qi) atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan geometrik jismdir.

Kundalik hayotda biz ko‘radigan ko‘plab shakllar aslida aylanish jismlaridir.

Silindr: To‘g‘ri to‘rtburchakni uning bir tomoni atrofida aylantirganda hosil bo‘ladi.

SILINDR (CYLINDER)

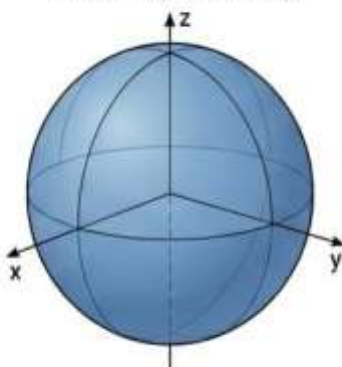


2-rasm

Konus: To‘g‘ri burchakli uchburchakni uning bir kateti atrofida aylantirganda hosil bo‘ladi.

Shar: Yarim aylana o‘z diametri atrofida aylanganda hosil bo‘ladi.

SHAR (SPHERE)



3-rasm

Aylanish jismining hajmini hisoblash — bu egri chiziqli shaklni biror o‘q atrofida aylantirganda hosil bo‘lgan fazoviy jismning sig‘imini aniqlashdir. Buni tushunish uchun eng asosiy ikki usulni ko‘rib chiqamiz.

Ox o‘qi atrofida aylantirish (Disklar usuli).

Agar $[a, b]$ kesmada berilgan $y = f(x)$ funksiya grafigi Ox o‘qi atrofida aylantirilsa, hosil bo‘lgan jismning hajmi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Jismni juda ko‘p ingichka doiralarga (disklarga) bo‘lib chiqamiz. Har bir doiraning yuzasi $S = \pi R^2$ bu yerda radius $R = f(x)$ ga teng. Ularning yig‘indisi (integrali) bizga umumiy hajmni beradi.

Oy o‘qi atrofida aylantirish.

Agar shakl Oy o‘qi atrofida aylantirilsa va funksiya $x = g(y)$ ko‘rinishida bo‘lsa, formula o‘zgaradi:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Misol: Aniq integralni xossalari yordamida hisoblash.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx.$$

Yechish. Ushbu integralni hisoblashda biz aniq integralning eng chiroyli va foydali xossalaridan biri — ”**Qirol xossasi**“ (**King’s Property**) dan foydalanamiz. Bu xossa quyidagicha ifodalanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a + b - x)dx.$$

Berilgan integralni I harfi bilan belgilaymiz:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx. \tag{2}$$

Yuqoridagi xossaga ko‘ra, x ning o‘rniga $(0 + \frac{\pi}{2} - x)$ ya‘ni $(\frac{\pi}{2} - x)$ ni qo‘yib:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(\pi / 2 - x)}}{\sqrt{\sin(\pi / 2 - x)} + \sqrt{\cos(\pi / 2 - x)}} dx. \tag{3}$$

ni hosil qilamiz.

$$\sin(\pi / 2 - x) = \cos x$$

$$\cos(\pi / 2 - x) = \sin x$$

keltirish formulalariga ko‘ra (3):

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx. \quad (4)$$

ko‘rinishga keladi. Endi (2) va (4) ni qo‘shamiz, chap tomon $I + I = 2I$ bo‘ladi, o‘ng tomonda esa:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \right) dx. \quad (5)$$

bo‘ladi. (5) ni soddalashtiramiz:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Bu usulning ajoyib tomoni shundaki, biz $\sqrt{\sin x}$ yoki $\sqrt{\cos x}$ funksiyalarining boshlang‘ich funksiyasini topishimiz shart bo‘lmadi. Ularning simmetrikligidan foydalanib, murakkab ifodani oddiy 1 soniga aylantirib oldik.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Azlarov T., Mansurov H. ”Matematik analiz“, 1-qism. Toshkent, ”O‘qituvchi“, 1994.
2. Sadullaev A. va boshqalar. ”Matematik analizdan misol va masalalar to‘plami“. Toshkent, 2006.
3. Thomas, G. B. ”Thomas‘ Calculus“, 14th Edition, Pearson, 2018.
4. Stewart, J. ”Calculus: Early Transcendentals“, 8th Edition, 2015.
5. Gaziyeu A. va boshqalar. ”Matematik analizdan misol va masalalar to‘plami“, 2005.
6. Joseph Edwards – ”A Treatise on the Integral Calculus“.
7. Fixtengols G.M. – ”Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya“ (3 tomlik).