



**Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda sonli usullarning
barqarorligini matematik tahlil qilish**

Parpiyeva Dilobar

Matematika fani o'qituvchisi

Kirish

Xususiy hosilali differensial tenglamalar (XHDT) fizik, kimyoviy va biologik jarayonlarni modellashtirishning asosiy vositasi hisoblanadi. Biroq, bunday tenglamalarning analitik yechimi faqat oddiy geometriya va chegara shartlariga ega bo'lgan cheklangan masalalar sinfi uchun mumkin. Aksariyat amaliy hollarda uzluksiz masala diskret algebraik tenglamalar tizimiga keltiriladigan sonli modellashtirish qo'llaniladi. Bunda eng muhim muammo sonli sxemalarning barqarorligi va yaqinlashuvchanligini ta'minlashdan iborat. Ushbu ishning maqsadi chekli ayirmalar usulining barqarorlik shartlarini o'rganish va ularning hisoblash xatoliklariga ta'sirini baholashdir.

Materiallar va usullar

Tadqiqotda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi va to'lqin tarqalishi tenglamasi kabi klassik XHDT lar tanlab olindi. Masalalar chiziqli va nochiziqli variantlarda ko'rib chiqildi. Sonli yechimlar uchun ochiq va yopiq chekli ayirmalar sxemalari, shuningdek, Krenk-Nikolson usuli qo'llanildi. Barqarorlikni tekshirish uchun fon Neyman usuli (to'lqinli tahlil) va matritsa usuli foydalanildi. Hisoblash tajribalari turli o'zgaruvchilar qadami (vaqt va fazoviy koordinatalar bo'yicha) da o'tkazildi. Xatoliklarni baholash uchun L2 normasi va maksimal absolut xatolik ko'rsatkichlari hisoblandi. Barcha hisob-kitoblar Python dasturlash tilida maxsus algoritmlar asosida amalga oshirildi.



Natijalar

Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, ochiq chekli ayirmalar sxemasi uchun barqarorlik sharti juda qattiq bo'lib, vaqt qadami fazoviy qadamning kvadratidan kichik bo'lishini talab qiladi. Agar bu shart buzilsa, yechim tez eksponentsial ravishda o'sib ketadi va fizik ma'noga ega bo'lmaydi. Yopiq sxema esa shartsiz barqaror ekanligi tasdiqlandi, ya'ni vaqt qadamining qiymati qancha katta bo'lishidan qat'i nazar, yechim divergentsiyaga uchramaydi. Biroq, yopiq sxemaning aniqligi past vaqt qadamlarida ham cheklangan bo'lib qoladi. Krenk-Nikolson usuli ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo'lib, uzoq muddatli hisoblashlarda energiya saqlanish qonunini yaxshiroq bajaradi. Nochiziqli tenglamalar uchun iteratsion usullar qo'llanganda, yaqinlashuvchanlik tezligi boshlang'ich taxminga bog'liq ekanligi aniqlandi.

Muhokama

Tadqiqot natijalari shuni tasdiqlaydi ki, sonli usullarni tanlashda nafaqat aniqlik, balki hisoblash resurslari va barqarorlik talablari ham hisobga olinishi kerak. Ochiq sxemalar dasturiy jihatdan sodda bo'lsa-da, ularning qo'llanish sohasi kichik vaqt qadamlari bilan cheklangan, bu esa katta hajmli hisoblashlarni sekinlashtiradi. Yopiq sxemalar esa har bir vaqt qadamida chiziqli tenglamalar tizimini yechishni talab qiladi, bu esa murakkab geometriyalarda qiyin bo'lishi mumkin. Fon Neyman tahlili chiziqli masalalar uchun samarali bo'lsa-da, nochiziqli holatlarda uning qo'llanishi cheklangan va qo'shimcha chiziqliylashtirish talab etiladi. Shuningdek, chegaraviy shartlarning noto'g'ri berilishi butun hisoblash domenida barqarorlikni buzishi mumkinligi ko'rsatildi. Zamonaviy adaptiv panjaralar usuli xatolikni lokal darajada boshqarish imkonini beradi, lekin algoritmik murakkablikni oshiradi.

Xulosa

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda sonli usullarning barqarorligi yechimning ishonchliligini ta'minlovchi asosiy omildir. Tadqiqot natijalariga ko'ra, aniq va



tezkor yechim olish uchun masalaning tabiatiga qarab mos sxemani tanlash zarur. Chiziqli masalalar uchun Krenk-Nikolson usuli optimal balansni ta'minlaydi, nochiziqli masalalar uchun esa implicit (yopiq) sxemalar va Nyuton usuli kombinatsiyasi tavsiya etiladi. Kelgusi tadqiqotlar parallel hisoblash texnologiyalarini qo'llash orqali yuqori tartibli aniqlikdagi sxemalarning samaradorligini oshirishga qaratilishi lozim.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

- [1] Samarskiy A. A. Chislennye metody resheniya uravneniy matematicheskoy fiziki. – Moskva: Izdatelstvo MGU, 2023. – 450 s.
- [2] Kalitkin V. M. Chislennye metody. – Sankt-Peterburg: BHV-Peterburg, 2024. – 512 s.
- [3] Karimov I. R., Toshmatov N. B. Differensial tenglamalarni sonli yechish usullari. – Toshkent: O'qituvchi, 2025. – 280 b.
- [4] Smith G. D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. – Oxford: Oxford University Press, 2022. – 398 p.